

POSIBILIDADES DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS EN EL MUNDO INDUSTRIAL

Eugenio Oñate

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
Universidad Politécnica de Cataluña
Gran Capitán s/n, Edificio C1, Campus Norte UPC
08034 Barcelona
onate@cimne.upc.es ; www.cimne.upc.es

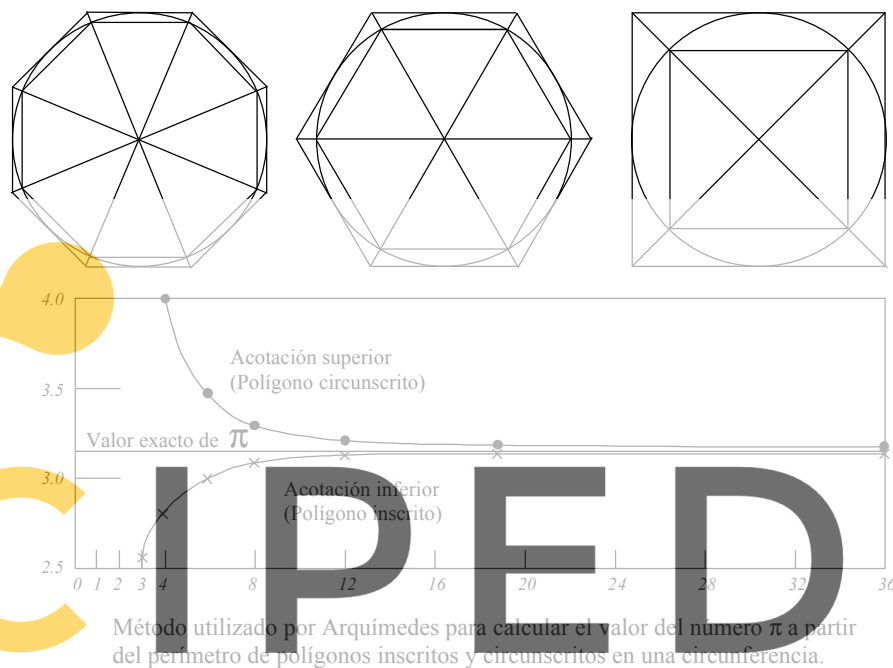
Resumen

Se presentan en el artículo las ideas básicas de qué son los métodos numéricos, cuáles son los métodos numéricos más populares, cómo se aplican para resolver ecuaciones diferenciales de interés práctico en ingeniería y qué posibilidades y limitaciones tienen para ayudarnos a entender mejor el mundo que nos rodea. El contenido del artículo se completa con diversas aplicaciones prácticas del método de elementos finitos a diversos problemas de ingeniería.

INTRODUCCIÓN

Se denominan métodos numéricos las técnicas de la matemática que permiten expresar la solución de un problema en forma de números. Para muchos, los métodos numéricos son una rama de la matemática aplicada, es decir, aquella parte de la matemática interesada en la resolución de problemas que afectan directa o indirectamente a los intereses del hombre. El término “solución numérica” se utiliza a menudo frente al de “solución analítica” (también denominada “solución exacta”) de un problema. La diferencia entre ambos tipos de solución es sustancial. Consideremos como ejemplo el estudio del comportamiento de un sistema de tipo físico o bien humanístico. Dicho sistema satisface unas leyes (ecuaciones) generales de tipo matemático (denominadas ecuaciones de gobierno); por ejemplo, unas ecuaciones o inecuaciones diferenciales o algebraicas en las que intervienen un conjunto de variables y parámetros físicos. La solución analítica es una expresión matemática que proporciona toda la información sobre el comportamiento del sistema, para cualquier valor de las variables y parámetros que intervienen en las ecuaciones de gobierno. Es, por tanto, la solución “universal” del problema a la que aspiraban los pitagóricos, Platón y tantos otros creyentes en la numerización del mundo. Por otro lado, la solución numérica expresa el comportamiento del sistema en función de números que se obtienen resolviendo las ecuaciones de gobierno para valores concretos de las variables y los parámetros del sistema. Como ejemplo, planteemos el problema de encontrar la ecuación que expresa todas las trayectorias posibles de un móvil que se desplaza en línea recta partiendo siempre del mismo punto. Obviamente, la solución general del problema es $y = kx$, donde y es la coordenada de un punto de la trayectoria, x el valor de la abscisa y k la pendiente de la recta. Dicha ecuación es universal y expresa el conjunto infinito de rectas que pasa por el origen. Dando valores a la pendiente k y a la abscisa x encontraremos las coordenadas de los puntos de las trayectorias seleccionadas, caracterizadas por los valores de x e y .

Un ejemplo clásico de solución numérica fue la obtenida por Arquímedes para el valor aproximado del número π a partir de la división de la circunferencia en polígonos obtenidos incrementando progresivamente el número de lados y dividiendo el perímetro de cada polígono por el radio del círculo. Obviamente, al aumentar el número de lados de cada polígono, aumentaba también la precisión en el valor del número π buscado. Tomando polígonos inscritos y circunscritos en la circunferencia de hasta 96 lados, Arquímedes logró acotar el valor de π entre 3.14084 y 3.14285 [1].



Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Figura 1. Método utilizado por Arquímedes para calcular el valor del número π a partir del perímetro de polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia.

La técnica utilizada por Arquímedes sintetiza la esencia de los métodos numéricos. La solución numérica se obtiene dividiendo el dominio que se estudia (la circunferencia) en formas geométricas sencillas (rectas), de las que se conocen todas sus propiedades (longitud). Se observa también que, la solución numérica es aproximada y mejora (converge) al incrementar el número de divisiones del dominio. Finalmente, es muy importante advertir que la solución “exacta” del problema (el valor exacto de π , uno de los números inconmensurables) es desconocida y la solución numérica es la única alternativa, como sucede en la mayoría de los problemas prácticos.

Es interesante destacar que una técnica similar de “divide y vencerás” fue utilizada por los calculistas chinos en el siglo V d.c. para obtener una acotación del valor de π mediante divisiones del área del círculo en rectángulos inscritos y circunscritos a la circunferencia (Figura 2) [2].

Los métodos numéricos, por tanto, buscan números, mientras que los métodos analíticos buscan fórmulas matemáticas. Obviamente, la solución analítica, al ser universal, contiene todas las soluciones numéricas, mientras que de la solución numérica de un problema es imposible, en general, deducir la solución analítica.

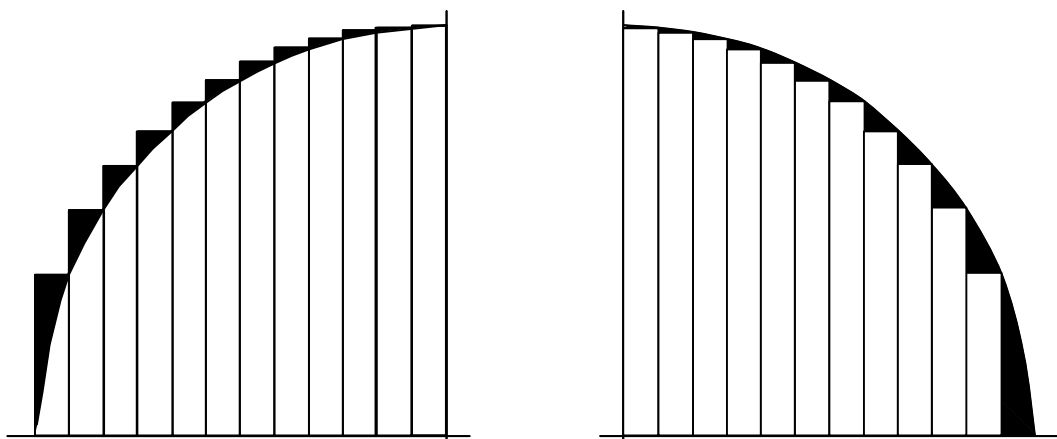


Figura 2. Aproximación del área del círculo mediante suma de áreas de rectángulos inscritos y circunscritos. Las zonas negras indican el error en el cálculo del área. Este método fue utilizado para evaluar el número π por matemáticos e ingenieros chinos en el siglo V d.C.

NECESIDAD Y LÍMITES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Tanto los métodos numéricos como los analíticos comparten un punto inicial fundamental: la necesidad de plantear en forma matemática el problema a resolver. Durante miles de años, hasta el descubrimiento del cálculo infinitesimal por Newton y Leibniz, dichas formas matemáticas eran variantes de expresiones polinómicas, destinadas muchas veces a resolver problemas de índole geométrico (tal como encontrar el valor del número π). La revolución del cálculo infinitesimal estribó fundamentalmente en su capacidad de expresar cualquier problema de la naturaleza en forma matemática por medio de *ecuaciones diferenciales*. Al mismo tiempo, Newton, Leibniz y tantos otros insignes sucesores (Euler, Cauchy, Lagrange, Navier, Gauss, etc.) sentaron las bases para resolver dichas ecuaciones diferenciales de forma analítica [5-6].

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

El profundo significado que para las matemáticas representaron los nuevos métodos de cálculo diferencial e integral propuestos por Newton y Leibniz, es comparable al que el descubrimiento del fuego tuvo para los hombres primitivos, o el de la electricidad para la revolución industrial.

Esta afirmación no es en absoluto exagerada. Antes de Newton y Leibniz no existía una metodología general para plantear en forma de ecuaciones matemáticas un problema concreto de la física, tal como, por ejemplo, la propagación del calor en un cuerpo, el flujo de un fluido o el equilibrio de un sólido elástico. Obviamente, al no poder plantearse el problema, su solución era imposible. Después de las aportaciones de Newton y Leibniz, no sólo fue ya posible describir el comportamiento de cualquier sistema físico, fuera éste un sólido, un líquido o un gas, mediante ecuaciones diferenciales e integrales, sino que se dispuso de técnicas para resolver aquéllas en muchos casos que, aunque usualmente eran simplificaciones del problema más general, permitieron avances significativos en el conocimiento científico y técnico. Así, mientras las matemáticas como ciencia autónoma exploraban nuevos campos de abstracción creciente, su aplicación a las demás ciencias se tornó cada vez más indispensable y eficaz. Esta aplicación se extendió, durante el siglo XVIII y el principio del XIX, de la mecánica y la astronomía a las restantes ramas de la física; más tarde a toda las ciencias naturales y, en este siglo, a todos los sectores del saber [7-9].

El optimismo que los primeros éxitos del cálculo infinitesimal infundió a la comunidad científica se vio matizado en posteriores aplicaciones por una desagradable evidencia: si bien todo problema

podía plantearse en forma matemática por medio de ecuaciones diferenciales, la solución «exacta» de dichas ecuaciones sólo era posible para algunos casos particulares, que en ocasiones eran groseras simplificaciones de la realidad. Las dificultades que presentaba encontrar la fórmula matemática universal que diera la solución de problemas prácticos de la ciencia y la técnica, hizo patente la necesidad de encontrar formas alternativas de resolver las ecuaciones diferenciales.

Así, a principios de este siglo, diversos científicos observaron que si las ecuaciones diferenciales para un problema concreto se discretizaban utilizando técnicas similares a las utilizadas por Arquímedes para calcular el valor del número π , podían llegar a obtenerse los valores numéricos de la función incógnita. Habían nacido los denominados *métodos numéricos* [9-11].

La estrategia común de todos los métodos numéricos es la transformación de las ecuaciones diferenciales que gobiernan un problema, en un sistema de ecuaciones algebraicas que dependen de un número finito de incógnitas. No obstante, puesto que este número de incógnitas es en la mayoría de los casos de muchos miles (e incluso millones), el sistema de ecuaciones final sólo puede resolverse con la ayuda del ordenador. Esto explica por qué, aunque muchos de los métodos numéricos eran conocidos desde el siglo XIX, su gran desarrollo y popularidad han sucedido paralelos al de los modernos ordenadores en este siglo.

Los métodos numéricos representan, en definitiva, el retorno de los números como los auténticos protagonistas de la solución de un problema. El bucle iniciado por Pitágoras hace 2.500 años se ha cerrado, por tanto, en las últimas décadas con la evidencia de que con ayuda de los métodos numéricos podemos obtener respuestas concretas a los enigmas del universo.

PLANTEAMIENTO GENERAL DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE UN PROBLEMA DE INGENIERÍA

Como se ha comentado en el apartado anterior la mayor parte de los problemas de ingeniería se pueden expresar por medio de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con sus correspondientes condiciones de contorno. Dichas ecuaciones se obtienen usualmente por reglas de balance sobre un elemento diferencial en el interior del dominio de análisis y en sus contornos. Ejemplos concretos de esta técnica de balance son la ecuación diferencial de segundo orden que expresa el balance de flujo de calor en un dominio Ω (conocida en su forma genérica como ecuación de Poisson), las ecuaciones diferenciales de equilibrio interno y equilibrio en el contorno del dominio Ω en mecánica de sólidos, las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y de masa en dinámica de fluidos, etc.

De manera general dichas ecuaciones diferenciales pueden expresarse como

$$\mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{b} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1a)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (1b)$$

En la expresión anterior \mathbf{A} y \mathbf{B} son operadores diferenciales que actúan sobre el vector de incógnitas \mathbf{u} , y \mathbf{b} y \mathbf{q} son vectores que contienen datos del problema. El operador \mathbf{A} se obtiene del balance de “flujos” sobre el dominio Ω , mientras que el operador \mathbf{B} resulta de las condiciones de balance en un dominio próximo al contorno Γ .

Como ejemplo de las ecs.(1) consideremos la ecuación de Poisson que gobierna la transmisión del calor por conducción en un dominio bidimensional

SCIPEDIA

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2)$$

$$k_x n_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + k_y n_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \bar{q} = 0 \quad \text{en } \Gamma_q \quad (3)$$

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{en } \Gamma_\phi$$

En las expresiones anteriores ϕ es la temperatura, k_x y k_y son las conductividades del material en las direcciones x e y , respectivamente, Q la fuente de calor sobre el dominio Ω , \bar{q} el calor que se pierde en dirección normal al contorno Γ_q , siendo n_x y n_y las direcciones del vector normal a dicho contorno y $\bar{\phi}$ la temperatura prescrita en el contorno Γ_ϕ . La unión de los contornos Γ_q y Γ_ϕ es el contorno total Γ del dominio Ω .

De las ecs.(2) y (3) se deducen los operadores y vectores de las ecs.(1) como

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} k_y \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} k_x n_x \frac{\partial}{\partial x} + k_y n_y \frac{\partial}{\partial y} \\ I \end{array} \right] \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = [\phi], \quad \mathbf{b} = [-Q] \quad \text{y} \quad \mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{c} -\bar{q} \\ \bar{\phi} \end{array} \right\} \quad (6)$$

En esencia el papel de los métodos numéricos es resolver en forma de números las ecuaciones de gobierno para valores concretos de los parámetros físicos del problema (las conductividades k_x y k_y), de las fuentes exteriores (Q) y de las condiciones de contorno (el flujo de calor \bar{q} prescrito sobre el contorno Γ_q y el valor de la temperatura prescrita $\bar{\phi}$ sobre el contorno Γ_ϕ). En realidad, el técnico

no se conforma con la mera solución de las ecs.(1), sino que además requiere que dicha solución se obtenga de la forma más *exacta*, *sencilla* y *económica* posible.

Esquema general de la solución numérica de un problema

La solución numérica de un problema gobernado por unas ecuaciones diferenciales con sus condiciones de contorno se basa en buscar una solución aproximada a las incógnitas del problema \mathbf{u} . Dicha solución aproximada se denomina $\hat{\mathbf{u}}$ y se expresa, en general, en términos de productos de funciones de aproximación conocidas $N_i(\mathbf{x})$ (generalmente de naturaleza polinómica) y coeficientes incógnitas \mathbf{a}_i . Así, , puede escribirse

$$\mathbf{u} \cong \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^N N_i(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i \quad (7)$$

La etapa anterior es conocida en el argot numérico como *discretización* de la solución del problema continuo. El problema se centra ahora en conocer los N vectores \mathbf{a}_i que son las incógnitas del problema.

El paso de las ecuaciones diferenciales de gobierno a un sistema de ecuaciones algebraico se efectúa usualmente a través del método de residuos ponderados (MRP) [12]. Este procedimiento puede entenderse fácilmente si se sustituye la aproximación (7) en las ecuaciones de gobierno (1).

Esto conduce a

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{b} = \mathbf{r}_\Omega \quad \text{en} \quad \Omega \quad (8)$$

$$\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{t} = \mathbf{r}_\Gamma \quad \text{en} \quad \Gamma \quad (9)$$

Los vectores \mathbf{r}_Ω y \mathbf{r}_Γ se denominan *residuos* de las ecuaciones de gobierno sobre el dominio y el contorno, respectivamente. El MRP se basa sencillamente en imponer que dichos residuos se anulan de forma ponderada sobre Ω y Γ . La expresión resultante del MRP es

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}_i^T \mathbf{r}_\Omega d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{w}}_i^T \mathbf{r}_\Gamma d\Gamma = 0 \quad (10)$$

En la ec.(10) \mathbf{w}_i y $\bar{\mathbf{w}}_i$ son vectores que contienen *funciones de peso* arbitrarias definidas sobre Ω y Γ , respectivamente. Sustituyendo en (10) de las expresiones de \mathbf{r}_Ω y \mathbf{r}_Γ de (8) y (9) se obtiene

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}_i^T [\mathbf{A}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{b}] d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{w}}_i^T [\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{t}] d\Gamma = 0 \quad (11)$$

Escogiendo ahora N vectores de funciones de peso \mathbf{w}_i y $\bar{\mathbf{w}}_i$ se obtiene un sistema algebraico de N ecuaciones con N incógnitas, que en problemas estacionarios se puede escribir de la forma

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (12)$$

En (12) \mathbf{K} es la denominada *matriz de rigidez* del sistema, \mathbf{a} es el vector de incógnitas que contiene los N vectores \mathbf{a}_i y \mathbf{f} es un vector que contiene términos conocidos provenientes de los vectores \mathbf{b} y \mathbf{t} en las ecuaciones de gobierno. La solución del sistema de ecuaciones algebraico (12) proporciona los N vectores \mathbf{a}_i . Sustituyendo éstos en la ec.(7) se obtienen los valores aproximados de las incógnitas \mathbf{u} en cada punto del dominio. Obviamente las expresiones de la matriz \mathbf{K} y del vector \mathbf{f} dependen de la selección de las funciones de peso. En el apartado siguiente se clasifican los métodos numéricos más comunes según el tipo de funciones de peso escogidas.

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Es muy interesante deducir los diferentes métodos numéricos que se utilizan en la práctica de la ingeniería a través de la selección de las funciones de peso \mathbf{w}_i y $\bar{\mathbf{w}}_i$. Seguidamente se efectúa una breve clasificación no exhaustiva.

Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas (MDF) se basa en escoger para \mathbf{w}_i y $\bar{\mathbf{w}}_i$ funciones *Deltas de Dirac* en un serie de puntos seleccionados del dominio de análisis [12,13] ordenados usualmente según una malla ortogonal. Esto equivale a *colocar* las ecuaciones diferenciales en dichos puntos. Las expresiones resultantes son

$$[\mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{b}]_i = 0 \quad i=1, N_\Omega \quad (13a)$$

$$[\mathbf{B}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{t}]_j = 0 \quad j=1, N_\Gamma \quad (13b)$$

donde N_Ω y N_Γ son el número de puntos de colocación en el dominio Ω y en el contorno Γ , respectivamente. Las derivadas que aparecen en los operadores \mathbf{A} y \mathbf{B} se evalúan generalmente por fórmulas en diferencias en función de valores de las incógnitas en puntos adyacentes a cada punto donde se colocan las ecuaciones. Se destaca que la matriz \mathbf{K} resultante en el MDF no es, en general, simétrica.

Método de elementos finitos

En el método de elementos finitos (MEF) se divide el dominio de análisis en una malla (regular o irregular) formada por figuras geométricas sencillas (triángulos y cuadriláteros en 2D y tetraedros y hexaedros en 3D). La aproximación de las incógnitas (7) se efectúa ahora *en el interior* de cada elemento, de manera que los parámetros \mathbf{a}_i pasan a ser los valores de \mathbf{u} en puntos concretos del elemento (denominados nodos). En el MEF es usual escoger para las componentes de \mathbf{w}_i y $\bar{\mathbf{w}}_i$ las mismas funciones de aproximación N_i (método de Galerkin). Esto conduce en la mayoría de los casos, después de una adecuada integración por partes de algunos términos de \mathbf{A} , a una expresión simétrica de la matriz \mathbf{K} .

El carácter local de la aproximación del MEF trae también como consecuencia que la matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{f} de la ec.(12) pueden obtenerse fácilmente ensamblando las contribuciones individuales de los diferentes elementos, lo que simplifica notablemente el proceso de cálculo [12,14].

En la Figura 3 se muestra de forma esquemática el proceso de análisis de la estructura de un puente por el MEF. A partir de la geometría inicial del puente se obtiene la malla de elementos finitos rectangulares que discretizan la losa superior y las vigas. Finalizado el proceso de cálculo, se obtiene una información completa del comportamiento del puente bajo las cargas actuantes, como, por ejemplo, el cambio de geometría bajo las cargas, las deformaciones y las tensiones en cada punto, etc. [14].



Figura 3. Análisis de la deformación de un puente por el método de elementos finitos.

El proceso de «discretización» del puente es conceptualmente similar al utilizado por Arquímedes para calcular el perímetro de la circunferencia mediante su división en polígonos. Asimismo, los

rectángulos de la Figura 3 juegan también un papel análogo a los utilizados por los calculistas chinos para evaluar el área del círculo en el siglo V d.C.

Desde el punto de vista del ingeniero de estructuras el método de los elementos finitos puede considerarse como una extrapolación de los métodos de cálculo matricial para estructuras de barras al análisis de estructuras de tipo continuo [14]. De hecho, a principios de los años 1940, surgen los primeros intentos de resolver problemas de elasticidad bidimensional con técnicas matriciales mediante la división del continuo en elementos de barra. Precisamente en 1943, R. Courant [15] introdujo por primera vez el concepto de «elemento continuo» al resolver problemas de elasticidad plana mediante la división del dominio de análisis en «elementos» triangulares sobre los que suponía una variación polinómica de la solución.

La irrupción masiva de los ordenadores digitales en la década de los 60, propició un avance espectacular de todos los métodos numéricos basados en técnicas matriciales, libres ya de las limitaciones que suponía hasta la fecha la solución de grandes sistemas de ecuaciones. Es en esta época cuando el método de los elementos finitos se consolida rápidamente como un procedimiento idóneo para solución de toda una variedad de problemas de ingeniería y de física. Es importante advertir que, en este contexto, sus primeras aplicaciones están motivadas por problemas de cálculo de estructuras y, en particular, con aplicaciones estructurales en ingeniería aeronáutica [16,17]. De hecho, fue R. Clough de la Universidad de Berkeley, quien en 1960, y en relación con la solución de problemas de elasticidad plana, sugirió por primera vez la denominación «elementos finitos» [18]. Desde esas fechas hasta la actualidad, el MEF ha tenido un desarrollo espectacular en su aplicación a otros campos. Así, apoyado por el avance de los ordenadores digitales el MEF disfruta hoy en día de una posición única como una técnica de solución potente de los problemas más diversos y complejos en innumerables campos de la ingeniería y la ciencia, desde el análisis estructural de edificios históricos, hasta el cálculo de la resistencia de un hueso del cuerpo humano; desde el estudio de la aerodinámica de un avión, hasta la evaluación del flujo de la sangre en las venas [12].

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

En el método de elementos de contorno (MEC) se escogen las funciones de peso w_i de manera que se anulen sobre el dominio Ω . La expresión integral resultante queda definida solamente sobre el contorno como

$$\int_{\Gamma} \bar{w}_i [\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{t}] d\Gamma = 0 \quad (14)$$

El MEC exige únicamente, por tanto, aproximar las incógnitas sobre los contornos del dominio de análisis, lo que conduce a una importante disminución del tamaño del sistema de ecuaciones resultante [19]. Lamentablemente la matriz de rigidez \mathbf{K} de dicho sistema no es simétrica, tal como sucede en el MDF.

El MEC permite, no obstante, un ahorro de cálculo substancial en la solución de problemas en donde la obtención de las ecuaciones integrales sobre el contorno es posible y sencilla, tales como problemas con propiedades lineales gobernados por la ecuación de Laplace (transmisión del calor, flujo en medio poroso, electromagnetismo, análisis elástico de sólidos, etc.). Pese a sus innegables ventajas en algunos casos, el MEC no es todavía tan utilizado como el MEF para la solución de problemas industriales.

Métodos de puntos

No podemos concluir esta breve reseña sobre métodos numéricos sin mencionar el reciente auge de los métodos basados en discretizaciones utilizando únicamente un conjunto de puntos. Estos métodos, adjetivados comúnmente *sin malla* [20], de *partículas* o métodos de *puntos finitos* (MPF) [21], tienen la ventaja de no necesitar la usualmente costosa construcción de una malla sobre el dominio de análisis; basta con «rellenar» su interior con un gran número de puntos a los que se asocian los valores de las incógnitas del problema. El conjunto de puntos próximo a un punto concreto se denomina «nube». La variación de cada incógnita en el interior de una nube se expresa en función de las variables en cada punto de la misma utilizando técnicas de mínimos cuadrados ponderados. El paso final es imponer el cumplimiento de las ecuaciones diferenciales de gobierno del problema sobre cada nube (en forma integral), o bien directamente “colocando” las ecuaciones en cada uno de los puntos que discretizan el dominio, de forma similar al MDF. En ambos casos se llega al sistema de ecuaciones algebraico buscado, cuya solución conduce a los valores numéricos de las incógnitas en cada punto [21].

TIPOLOGÍA DE LAS ECUACIONES EN PROBLEMAS DE INGENIERÍA

De forma esquemática, las ecuaciones que intervienen en los problemas de ingeniería más usuales pueden clasificarse en los tres grandes grupos siguientes.

Problemas de estática

Las ecuaciones tienen la forma de las expresiones (1), y en ellas todas las variables y parámetros son independientes del tiempo. El sistema de ecuaciones algebraicas después del proceso de discretización tiene la forma matricial expresada por la ec. (12).

Los ejemplos de aplicaciones en ingeniería de los problemas de estática son muy numerosos en el cálculo de estructuras y sistemas mecánicos, en la transmisión del calor en régimen estacionario, en problemas de filtración y electromagnetismo en régimen estacionario, en problemas estacionarios de dinámica de fluidos, etc.

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Problemas dinámicos de primer orden

La forma general de las ecuaciones de gobierno en este tipo de problemas puede expresarse como

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) - \mathbf{b}(t) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad (15a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) - \mathbf{q}(t) = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma \quad (15b)$$

donde $\dot{\mathbf{u}} = \frac{d}{dt} \mathbf{u}$, siendo t el tiempo. En este caso $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t)$.

Un ejemplo de las expresiones anteriores es la ecuación de propagación del calor por conducción en régimen transitorio. En una dimensión

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \phi}{\partial x} - \bar{q} &= 0 & \text{en} & \Gamma_q \\ \phi - \bar{\phi} &= 0 & \text{en} & \Gamma_\phi \\ \phi(x, 0) &= 0 & \text{para} & t = 0 \end{aligned} \quad (16b)$$

En (16a) ρ y c son la densidad y el calor específico, respectivamente. La forma del sistema de ecuaciones resultante después del proceso de discretización sobre el dominio espacial Ω se puede expresar como

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (17)$$

La ec.(17) es un sistema de ecuaciones algebraicas donde intervienen los parámetros incógnitas del problema \mathbf{a} y sus derivadas con respecto al tiempo $\dot{\mathbf{a}}$. La siguiente etapa en la solución numérica del problema es la integración temporal de la ec.(17). Ello puede hacerse utilizando diferentes técnicas para solución numérica de ecuaciones diferenciales parabólicas.

El procedimiento más popular para integrar en el tiempo la ec.(17) es aplicar el método de diferencias finitas. En cualquier caso, el procedimiento de integración temporal proporciona los valores de los parámetros incógnitas en el tiempo $n+1$ en función de valores de dichos parámetros conocidos en el tiempo n . En forma general

$$\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{a}^n) \quad (18)$$

Existen diferentes técnicas para obtener el vector $\mathbf{g}(\mathbf{a}^n)$, bien resolviendo un sistema de ecuaciones algebraico en cada paso de tiempo (métodos implícitos), o de forma directa sin necesidad de resolver un sistema de ecuaciones (métodos explícitos) [12].

Las aplicaciones en ingeniería de esta clase de ecuaciones diferenciales son también muy numerosas. Entre los problemas más característicos podemos citar todos los de dinámica de fluidos en régimen transitorio; problemas no estacionarios de transmisión del calor, de filtración en medios porosos y de electromagnetismo; problemas de consolidación de suelos, etc.

Problemas dinámicos de segundo orden

Las ecuaciones de gobierno se escriben por

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) - \mathbf{K}(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{Q}(t) \quad \text{en } \Gamma \quad (19a)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}) - \mathbf{q}(t) = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (19b)$$

Un ejemplo típico es la ecuación de ondas. En una dimensión

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + c \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + Q = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (20)$$

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \phi}{\partial x} + \bar{q} &= 0 & \text{en } \Gamma_q \\ \phi - \bar{\phi} &= 0 & \text{en } \Gamma_\phi \end{aligned} \quad (21)$$

$$\phi(x, 0) = \dot{\phi}(x, 0) = 0 \quad \text{para } t = 0$$

El proceso de discretización temporal conduce a un sistema algebraico de ecuaciones de la forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (22)$$

La solución numérica en el tiempo por un algoritmo de diferencias finitas proporciona los valores de \mathbf{a} , $\dot{\mathbf{a}}$ y $\ddot{\mathbf{a}}$ en el tiempo $n+1$ en función de sus valores en tiempos anteriores.

Las aplicaciones prácticas de las ecuaciones de este tipo son muy usuales en análisis dinámico de sólidos y estructuras y en problemas de propagación de ondas, (acústica, electromagnetismo, oleaje, etc.).

MÉTODOS NUMÉRICOS Y REALIDAD

Está claro que el objetivo de los métodos numéricos es reproducir lo más fielmente el comportamiento del mundo a través de números. Recordemos, no obstante, que el primer paso en ese proceso es establecer un *modelo matemático* de la realidad en cuestión. Los métodos numéricos permiten resolver en forma numérica con ayuda del ordenador las ecuaciones matemáticas de dicho modelo, generalmente expresadas por medio de ecuaciones o inecuaciones en derivadas parciales o algebraicas. Los números que resultan del cálculo, expresados por medio de gráficos dibujados por ordenador, representan la visión de la realidad que proporciona el *proceso de cálculo* escogido. Obviamente, la solución numérica solo coincidirá con la *realidad* si: a) el modelo matemático incorpora todos los aspectos del mundo real; y b) el método numérico puede resolver exactamente las ecuaciones del modelo matemático.

En la práctica, ninguna de estas dos condiciones se cumple y hay que admitir que la predicción numérica no coincidirá con el comportamiento del mundo real. Se dice entonces que la solución numérica *aproxima* la realidad. Si conocemos la solución “real” del problema que se estudia, podemos compararla con la solución numérica y obtener el error de la predicción. En la práctica, sucede también que generalmente dicha solución real no existe, ya que todo modelo matemático expresa una idealización simplificada de la realidad. Así, pues, en el mejor de los casos es posible obtener soluciones “exactas” de algunos modelos matemáticos que son aproximaciones de la realidad. Estas soluciones “exactas” (que denominábamos soluciones analíticas al inicio del artículo) sí que pueden compararse con las obtenidas resolviendo por métodos numéricos los mismos modelos matemáticos. Desgraciadamente, las soluciones exactas son también prácticamente imposibles de obtener para la mayoría de los modelos matemáticos que resuelven problemas de interés. Los pocos casos (generalmente de tipo académico) en que esta comparación es posible sirven para calibrar el método numérico. En el resto de situaciones, la única comparación factible se consigue con resultados de pruebas experimentales obtenidos para problemas concretos, en los cuales es posible realizar mediciones. Naturalmente, la validación experimental es útil para calibrar, tanto el método numérico utilizado, como el modelo matemático subyacente.

En resumen, nuestra visión de la realidad será siempre aproximada, tanto por las limitaciones de formalizar dicha realidad mediante un modelo matemático, como por los errores inherentes en la aplicación de métodos numéricos a dicho modelo. Nuestra única referencia posible son las validaciones empíricas de los resultados numéricos, utilizando valores experimentales obtenidos en pruebas de laboratorio o de campo muy concretas. En la mayoría de los casos estamos solos frente al conjunto de números que resultan de la predicción de un problema cuya solución “real” es desconocida. Es en ese momento, cuando toda la experiencia acumulada en la calibración y validación del modelo matemático y el método numérico escogidos debe utilizarse para aceptar o no los números que proporciona el cálculo.

Quizá ningún ejemplo como el de la estimación del número π ejemplifica las limitaciones de los métodos numéricos. Como es sabido el número π es uno de los inconmensurables, es decir, tiene un número infinito de cifras y cualquier proceso de cálculo conduce a una solución numérica aproximada del valor de π . Tomemos, por ejemplo, el método utilizado por Arquímedes, a base de dividir la circunferencia en polígonos inscritos y circunscritos de un número de lados crecientes. Refinando progresivamente dicho proceso de cálculo, es decir, tomando más y más polígonos inscritos y circunscritos a la circunferencia, se puede disminuir el error de la aproximación y acotar el valor de π entre dos números cada vez más próximos. En cualquier caso, la solución numérica será siempre una *estimación* del valor real de π , aunque deberemos aceptarla como útil para cualquier cálculo posterior en el que se necesite su valor (Figura 1).

Para poner de manifiesto las relaciones entre realidad, métodos numéricos, modelos matemáticos e informática, tendríamos que dar respuesta a muchas preguntas, ¿Qué hace veraz una solución numérica? ¿Por qué he de creer los valores numéricos obtenidos a través del ordenador? ¿Qué confiere a una solución numérica su utilidad? ¿Qué hace que sea buena o mala? ¿Qué la hace bella o fea? ¿Cuál ha sido la influencia de los métodos numéricos sobre las teorías del conocimiento y la existencia matemática; sobre la intuición matemática; sobre la educación matemática? ¿Qué relación existe entre el pensamiento matemático, los métodos numéricos y las capacidades potenciales del ordenador y la mente humana? ¿De qué modo contribuye la solución numérica de un problema a cambiar nuestra idea de la realidad, del conocimiento, del tiempo?

Una vez dada respuesta a las preguntas anteriores tendríamos bien andado el camino conducente a la creación de una filosofía de los métodos numéricos (o del cálculo). Así, al igual que la filosofía clásica se ha ocupado de lo verdadero, lo bueno y lo bello, así también, la filosofía de los métodos numéricos podría ocuparse de la veracidad de los cálculos, de la bondad y belleza en la solución numérica de los problemas del universo [8]. Sólo a través de una reflexión profunda sobre estas ideas podremos aportar luz sobre una sociedad cada vez más dividida entre los que opinan que la informática y sus actividades subsiguientes son un mal irremediable, que degrada el espíritu y corrompe la inteligencia, y los que, en el polo opuesto, creen que los números que proporciona el ordenador, generados a través de modelos matemáticos de la realidad y métodos numéricos, nos ayudan a entender mejor el mundo que nos rodea, y son un ingrediente más para alcanzar la justicia social y la pacificación del mundo.

APLICACIONES

Se presentan en este apartado diversas aplicaciones del método de elementos finitos a problemas de ingeniería.

La primera aplicación se refiere al análisis de estructuras históricas. En la Figura 4.1 se muestra la discretización en elementos hexaédricos de las cinco cúpulas de la Basílica de San Marcos en Venecia. El análisis estructural no lineal consistió en calcular el coeficiente de seguridad a rotura de la estructura obtenido al aumentar progresivamente el peso hasta obtener la rotura de las cúpulas. Las Figura 4.2 muestra los diferentes niveles de deterioro en la estructura en el momento de la ruina. La intensidad del deterioro se caracteriza por la gama de colores.

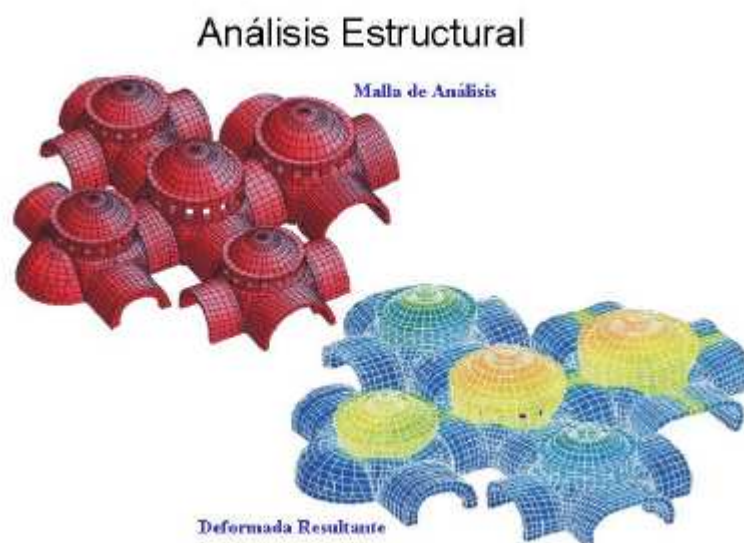


Figura 4.1 Discretización de las cúpulas de la Basílica de San Marcos con elementos finitos hexaédricos. Deformada de la estructura bajo su propio peso.

Análisis Estructural

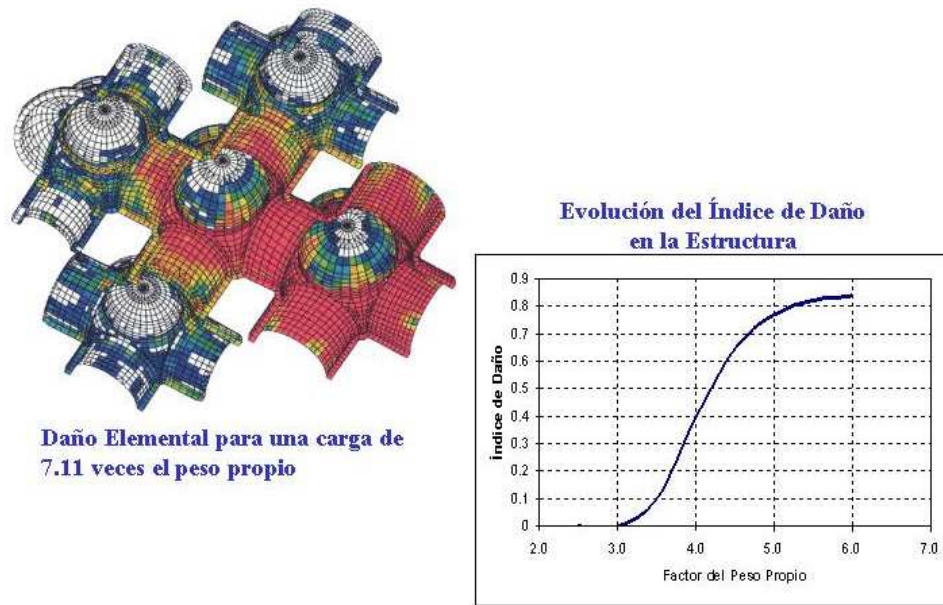


Figura 4.2 Basílica de San Marcos. Niveles de deterioro en la estructura para una carga equivalente a 7.11 veces el peso propio

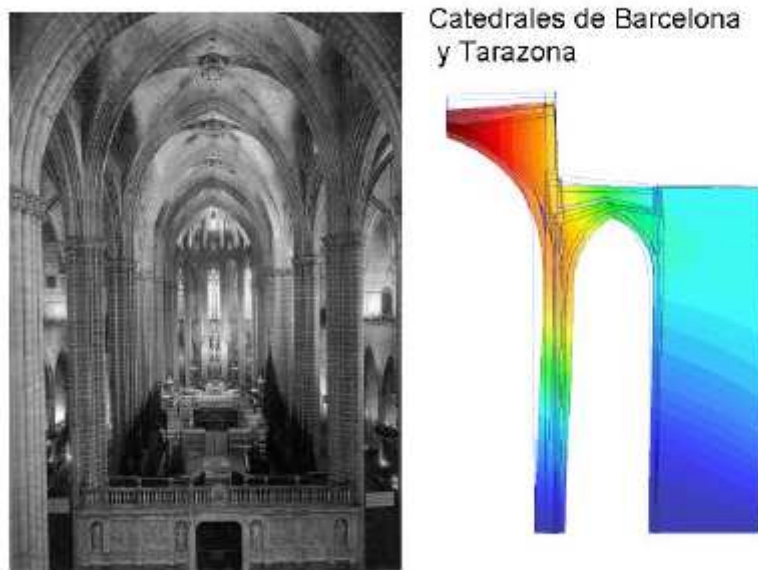


Figura 5 Análisis estructural de la Catedral de Barcelona

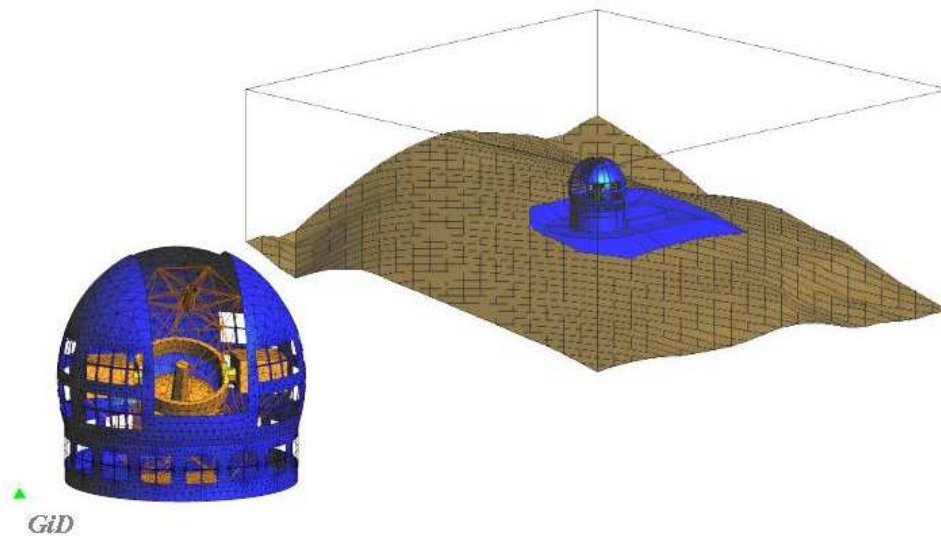
En la Figura 5 se muestra un ejemplo de un estudio similar realizado sobre la Catedral de Barcelona. Para más detalle sobre análisis por el MEF de estructuras históricas consultar las referencias [22-24].

El siguiente ejemplo muestra diferentes resultados del estudio aerodinámico realizado sobre el nuevo edificio del Gran Telescopio de Canarias situado en la isla de La Palma. El contorno del edificio que alberga el telescopio (Figura 6) se discretiza en elementos finitos. Tras ello se discretiza

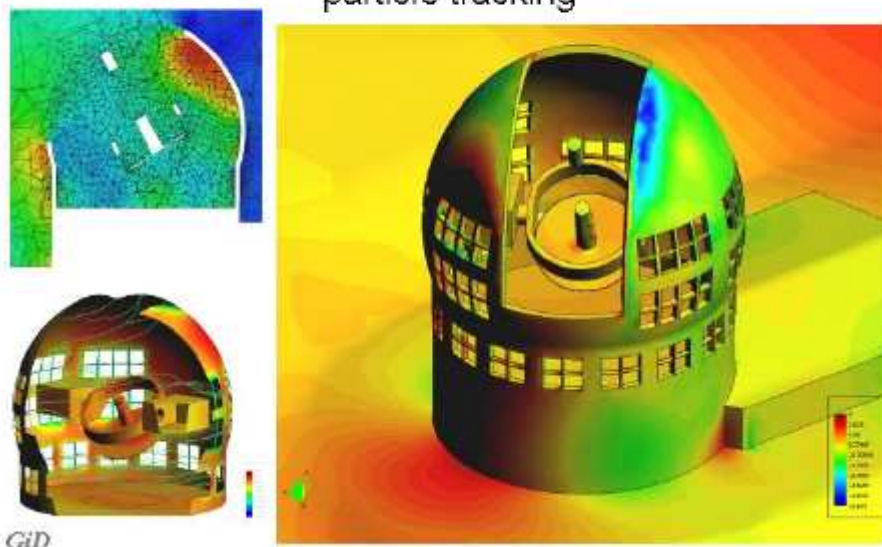
el volumen de aire en el interior y el exterior del edificio en tetraedros y se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes que gobiernan el flujo del aire en el interior de un dominio de control que incluye el edificio y su entorno. Como resultados se obtienen los campos de velocidades, presiones y temperaturas en todos los puntos del dominio. Estos resultados se utilizan para diseñar el sistema de ventilación del edificio, a través del estudio de la trayectoria de las partículas de aire, para evaluar las fuerzas sobre los diferentes instrumentos, para obtener la temperatura en las proximidades de los espejos del telescopio y para estimar la posible perturbación de la imagen por efecto de las turbulencias en el fluido [25].

GRANTECAN - Telescope building

JIMNE



Telescope building - pressure distribution –
particle tracking



Telescope building -velocity vectors - render mode

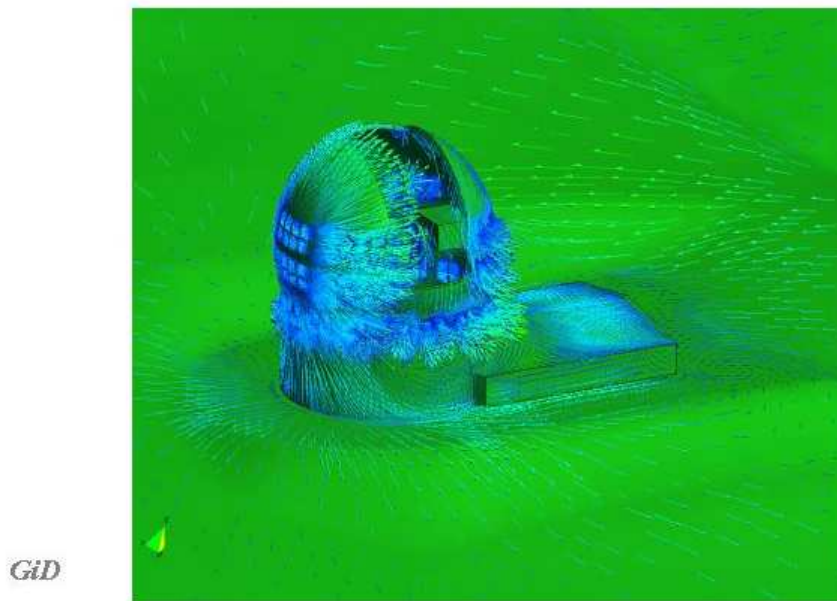
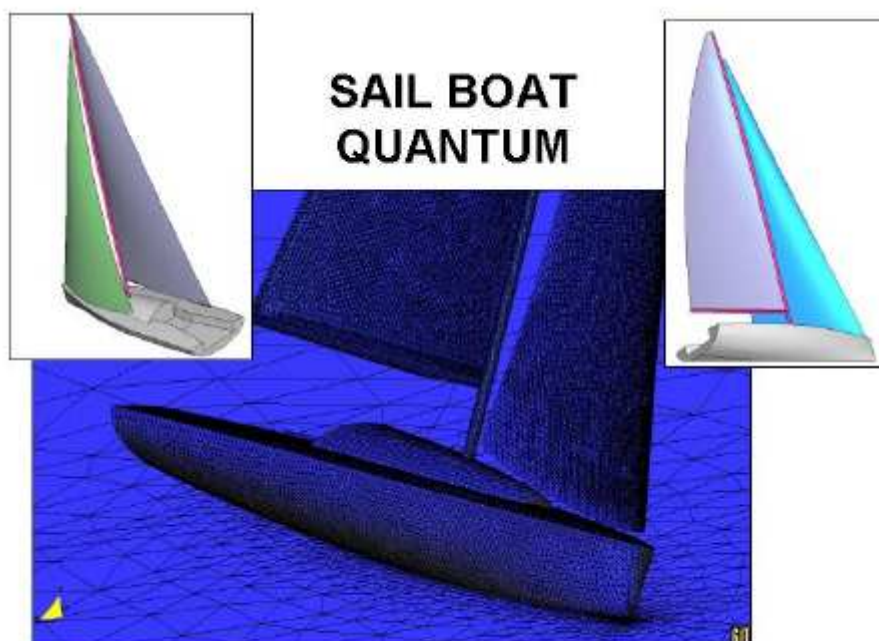


Figura 6. Análisis aerodinámico por el MEF del edificio del Gran Telescopio de Canarias. Discretización del edificio y el terreno circundante y diferentes resultados de la distribución de presiones y velocidades y de las trayectorias de las partículas de aire

En el siguiente ejemplo se presenta el análisis hidrodinámico y aerodinámico de un velero. En el estudio por el MEF se analiza el flujo de aire alrededor de las velas y el casco, y la hidrodinámica de la parte sumergida de este último. En las Figuras 7 se muestran diferentes resultados de este estudio [26].



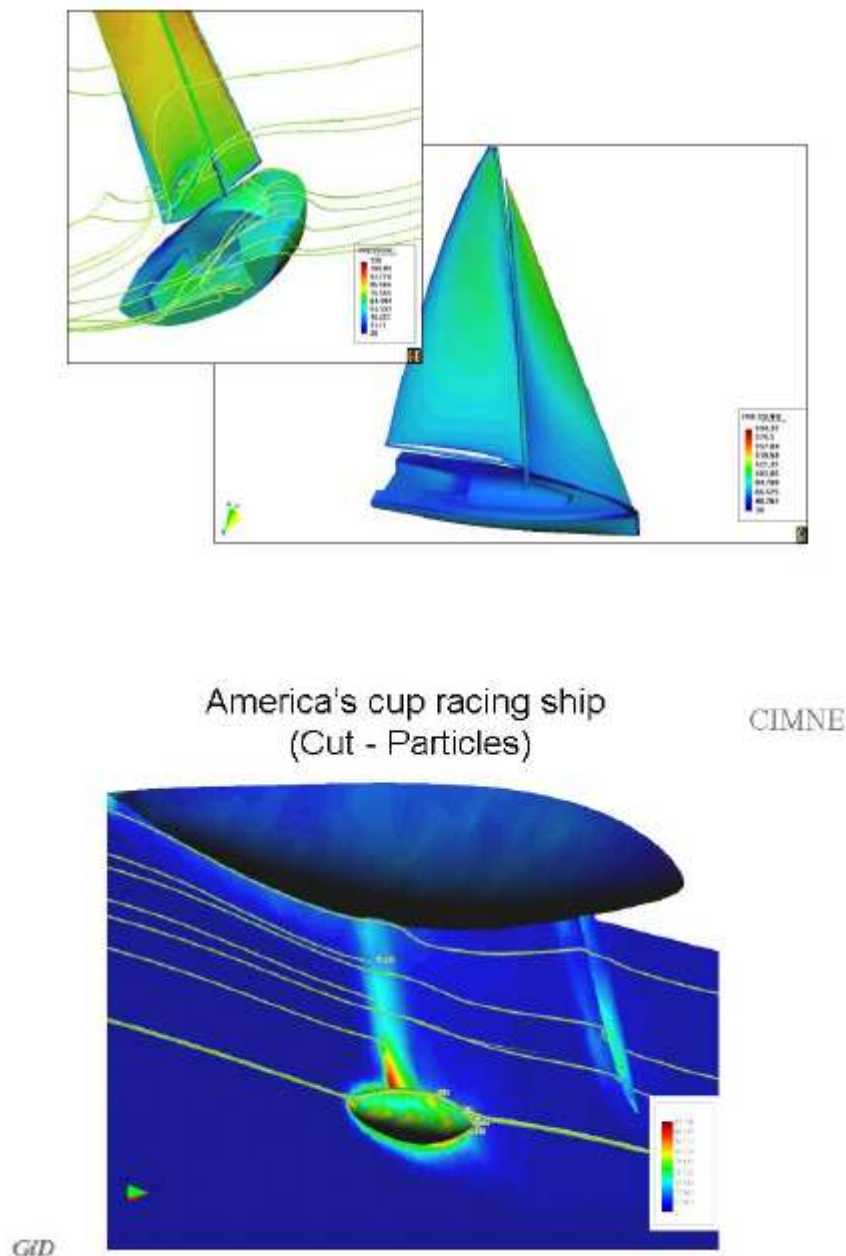
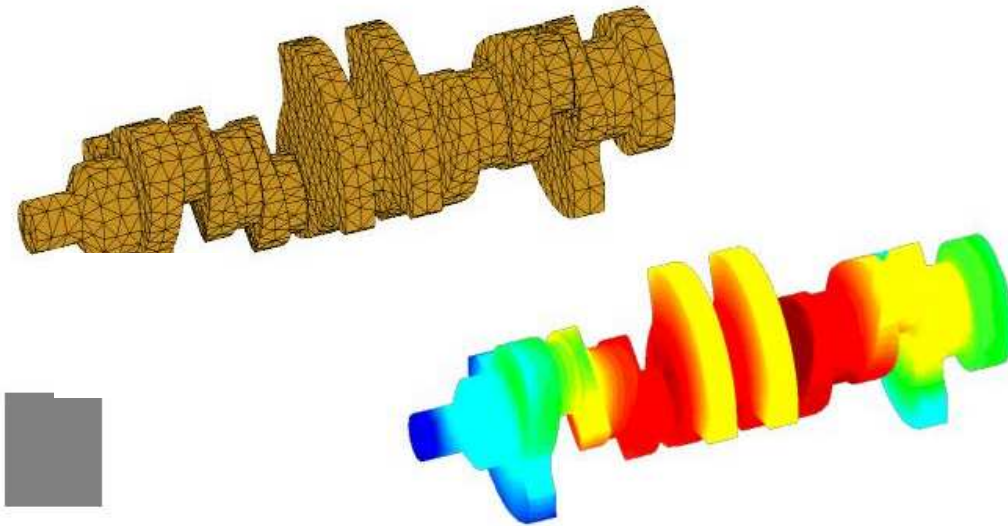


Figura 7. Análisis por el MEF de la aerodinámica e hidrodinámica de un velero de competición. Trayectorias de las partículas del aire y distribución de presiones del agua sobre el casco y apéndices

El siguiente ejemplo es el de análisis del proceso de fabricación de un cigüeñal de un coche por fundición. El estudio implica simular con detalle el proceso de llenado del molde por el metal fundido y seguidamente analizar el proceso de solidificación y enfriamiento del metal, desde la temperatura de 1200° del acero fundido hasta la temperatura ambiente. Como resultado del estudio se obtiene también la distribución de deformaciones y tensiones en la pieza durante el proceso de solidificación y enfriamiento. Las figuras 8 muestran los mapas de temperaturas en el cigüeñal en distintos instantes del proceso de enfriamiento. Para más información sobre este problema y otras aplicaciones del MEF a procesos de conformado de metales consultar las referencias [27,28].

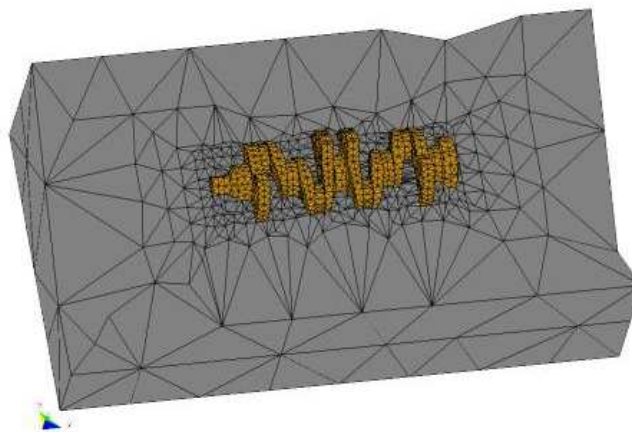
Crankshaft



CIMNE

COMET

Crankshaft



CIMNE

Mesh: 9.815 Nodes
43.654 Elements

COMET

Figura 8 Análisis por el MEF del proceso de solidificación y enfriamiento de un cigüeñal fabricado por fundición

El último ejemplo es el estudio de la deformación de un automóvil en un choque contra una pared rígida. El análisis se realizó discretizando la estructura del coche por el MEF y resolviendo las ecuaciones de la dinámica de la estructura, teniendo en cuenta los efectos del contacto entre el vehículo y la pared durante el choque. En las Figuras 9 se muestra la malla de elementos finitos utilizada y una vista de la deformada del vehículo después de 24 milisegundos de iniciarse el impacto. Se destaca que los resultados se han obtenido en un ordenador PC dual calculando en paralelo en los dos procesadores, mediante una partición de la estructura en dos dominios tal y como se muestra en la figura.

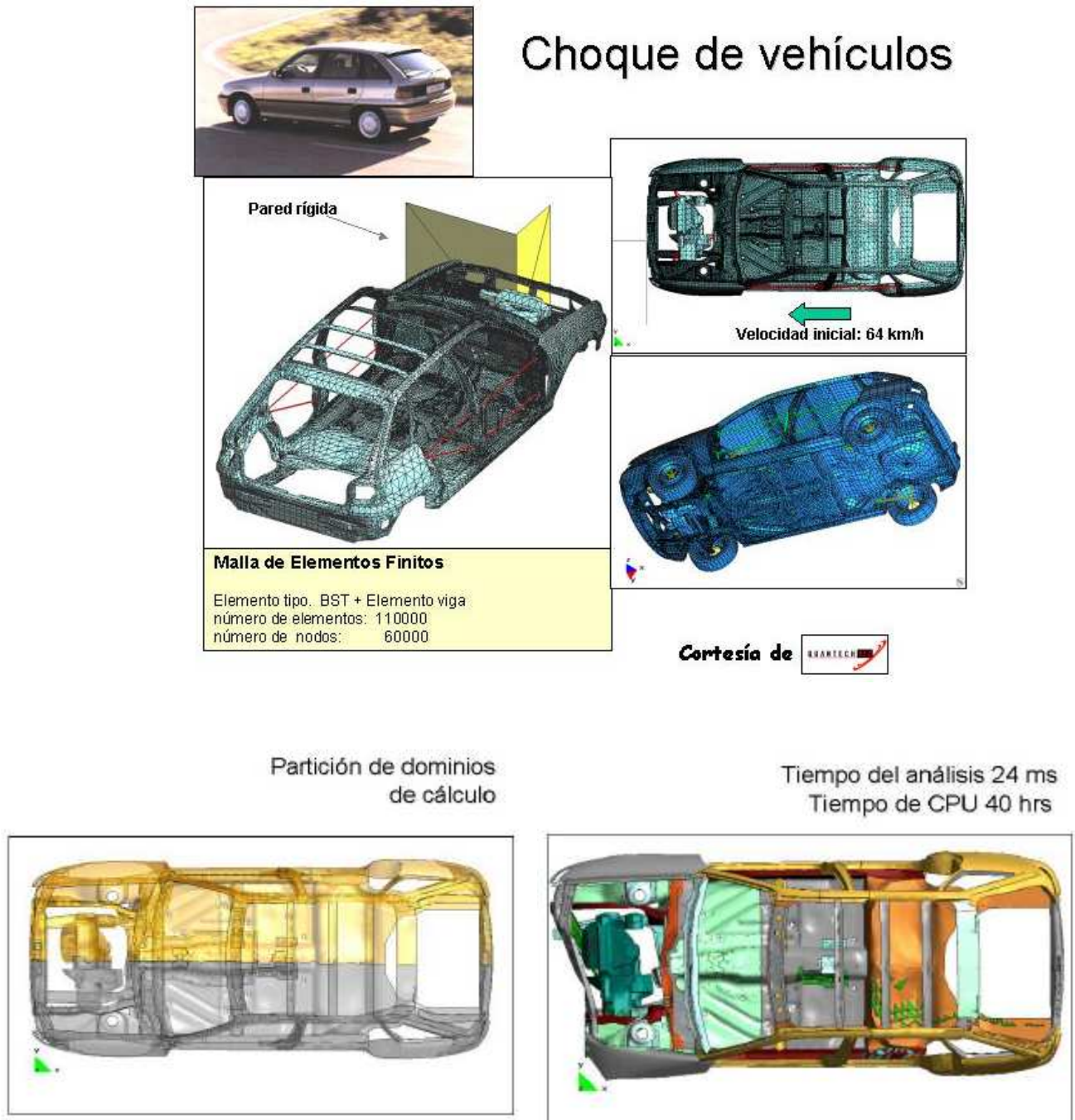


Figura 9 Malla de elementos finitos, partición de la estructura en dos dominios para cálculo en paralelo y deformada del vehículo después de 24 milisegundos de iniciarse el impacto

Los ejemplos anteriores son un botón de muestra de las posibilidades del MEF en su aplicación al mundo industrial. Para más detalles sobre ésta y otras aplicaciones puede consultarse la página web del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería en www.cimne.upc.es.

LÍMITES Y PERSPECTIVAS DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

¿Es posible describir con la ayuda de las matemáticas y los métodos numéricos todos los aspectos del mundo? En realidad, los límites de los métodos numéricos, es decir, los límites de poder expresar en forma numérica cualquier problema del universo, están íntimamente ligados a la posibilidad de plantear (formalizar) dicho problema en forma matemática. Ante esta situación, surge inmediatamente la pregunta: ¿Es posible matematizarlo todo? ¿Habrá algo en el mundo que no pueda jamás llegar a ser descrito en lenguaje matemático? Como afirman P.J. Davies y R. Hersh [8], no parece que haya en el mundo físico nada no matematizable. Tenemos confianza, por tanto, en que la física es capaz de abarcar cualquier fenómeno físico y que es capaz de hacerlo por medio de un formalismo matemático.

El límite de lo claramente matematizable parece, por lo tanto, que coincide con el límite del mundo físico. ¿Qué otro mundo hay? Si nuestras convicciones son las de un materialista mecanicista puro, probablemente contestaremos que ninguno.

No obstante, es evidente que existen cosas tales como emociones, creencias, actitudes, sueños, intenciones, celos, envidias, ansias, pesares, sentimientos como la ira y la compasión y muchos otros. Estas cosas, que componen el mundo interior de la mente humana, y, más aún todavía, todas aquéllas que abarcan la “vida interior” de la sociedad, de la civilización misma, por ejemplo, la literatura, la música, la política o las mareas y corrientes de la historia. ¿Podrán ser matematizadas?

La respuesta no es sencilla, ni banal. A lo largo de la historia encontramos defensores de la creencia de que todo es matematizable, y por tanto numeralizable, y de lo contrario.

Tomando partido, podríamos afirmar que pueden describirse con modelos matemáticos todas las facetas del mundo que puedan encuadrarse mediante enunciados concretos. Naturalmente, si dicho enunciado es esencialmente de tipo humanista, la dificultad de establecer el modelo será mucho mayor. Tomemos, por ejemplo, el sentimiento de bienestar. En este caso, un experimentalista podría afirmar que el bienestar es mera función de los niveles de hormonas y azúcar en la sangre, con lo que se entrevé de nuevo la posibilidad de encontrar un modelo matemático/numérico para el bienestar. Un viejo conflicto entre científicos y humanistas proviene de que estos últimos sienten que debería existir una porción del mundo inmune a la matematización, mientras que los científicos son del sentir contrario, es decir, todo aspecto del mundo admite una descripción matemática y por consiguiente numérica. De nuevo, reaparece la vieja aspiración de Pitágoras y Platón, que va ganando adeptos a medida que se producen nuevos éxitos en la matematización del mundo.

En nuestros días, las bases de las ciencias de la naturaleza, la física, la astrofísica, la química y también todas las ingenierías son profundamente matemáticas. Los modelos matemáticos y numéricos son, en todas estas disciplinas, herramientas de uso cotidiano, tanto para la explicación de fenómenos del universo como para el diseño de productos y procesos. Más aún, para que una nueva teoría sea tenida como científica, y por tanto aceptada, es casi condición necesaria que sea expresable en lenguaje matemático, y es casi seguro que si las matemáticas disponibles son inadecuadas para describir ciertos fenómenos observados, será posible idear y desarrollar las adecuadas.

Las ciencias de la vida, la biología y la medicina, están adquiriendo un carácter cada vez más matemático/numérico. Los mecanismos que controlan los procesos fisiológicos, la genética, la morfología, la dinámica de poblaciones, la epidemiología y la ecología han sido provistos de modelos matemáticos y numéricos.

No es posible comprender la teoría económica sin una sólida formación matemática y numérica. Las teorías de la competencia, de los ciclos y equilibrios comerciales exigen matemáticas y técnicas de cuantificación de tipo más profundo. La determinación de una política comercial o militar pueden requerir teorías de decisión, teorías de juegos y estrategias de optimización.

Con independencia del problema que se resuelva, es importante recordar que el fin último de los métodos numéricos es proporcionar comprensión, no números. En suma, los métodos numéricos deben estar íntimamente ligados tanto a la fuente del problema, como al uso que se pretenda hacer de los resultados numéricos; la aplicación de dichos métodos no es, por tanto, una etapa a considerar aisladamente de la realidad [8].

La palabra que quizás puede sintetizar el futuro más inmediato de las aplicaciones de los métodos numéricos es «multifísica». Los problemas no se abordarán más desde la perspectiva de un único medio físico, e incorporarán todos los acoplamientos que caracterizan la complejidad de la realidad. Así, por ejemplo, el diseño de una pieza de un vehículo (un avión, un automóvil, etc.) se realizará teniendo en cuenta el proceso de fabricación y la función que dicha pieza ejercerá a lo largo de su «vida útil». Las estructuras en ingeniería civil se estudiarán teniendo en cuenta los efectos con el medio circundante (el terreno, el agua, el aire). Ejemplos similares pueden encontrarse en ingeniería naval y aeronáutica, entre otras, así como en bio-ingeniería, en economía, en demografía, en la modelización del comportamiento de personas y grupos y en prácticamente todas las áreas de la ciencia. La importancia de tener en cuenta el carácter no determinista de todos los datos, será esencial para estimar la probabilidad de que los nuevos modelos matemáticos concebidos por el hombre se comporten de la forma prevista.

Sólo desde la perspectiva de una estrecha cooperación entre todas las partes del triángulo formado por el conocimiento profundo de las bases físicas y matemáticas de cada problema, los métodos numéricos y la informática, podrán encontrarse soluciones efectivas a los megaproblemas del nuevo siglo. Esa cooperación deberá verse reflejada también en un mayor énfasis en la optimización de los recursos materiales y humanos necesarios para afrontar con garantías el cambio de escala de los problemas a resolver y, sobre todo, en la puesta en marcha de acciones de formación innovadoras para preparar a las nuevas generaciones, que, con la ayuda de las matemáticas y los números, deberán abordar con éxito la solución de problemas multidisciplinarios.

REFERENCIAS

- [1] P. Beckmann, *A history of π* , The Golem Press, 1971.
- [2] T. Kiang, «An old chinese way of finding the volume of a sphere», *Math. Gazette*, LVI, 88-91, 1972.
- [3] M.E. Baron, *The origins of infinitesimal calculus*, Dover Publications, 1987.
- [4] J. Rey Pastor y J. Babini, *Historia de la matemática* (dos volúmenes), Editorial Gedisa, 3ª Ed., 1997.
- [5] C.B. Boyer, *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial. 1999.
- [6] E.T. Bell, *The development of mathematics*, Dover Publications, 1992.
- [7] G. Frey, *La matematización de nuestro universo*, G. del Toro Editor, 1972.
- [8] P.J. Davis y R. Hersch, *El sueño de Descartes*, Editorial Labor, 1989.

- [9] E. Oñate, *El Aura de los Números*, Reial Acadèmia de Doctors, Barcelona, 1998.
- [10] E. Oñate, “El bucle de los números”, Publicación de Investigación, CIMNE No. 192, 2000.
- [11] E. Oñate, “Límites de los métodos numéricos”, Publicación de Investigación, CIMNE No. 191, 2000.
- [12] O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, “*El método de los elementos finitos*”, McGraw Hill-CIMNE, Barcelona, Vol. I -1993, Vol. II - 1994.
- [13] R.V. Southwell, “*Relaxation methods in theoretical physics*”, Clarendon Press, 1946.
- [14] E. Oñate, “*Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos*”, CIMNE, Barcelona, 1992.
- [15] R. Courant, “Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration”, *Bull. Am. Math. Soc.*, Vol. **49**, pp. 1-23, 1943.
- [16] M.J. Turner, R.W. Clough, H. Martin y L.J. Topp, “Stiffness and deflection analysis of complex structures”, *J. Aeron. Sci.*, Vol. 23, pp. 805-823, 1956.
- [17] J.J. Argyris y S. Kelsey, “*Energy theorems and structural analysis*”, Butterworth, 1960.
- [18] R.W. Clough, «The finite element method in plane stress analysis», *Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. in Electronic Computation*, Pittsburgh, Pa. Sept. 1960.
- [19] C.A. Brebbia y J. Domínguez, “*Boundary elements. An introductory course*”, *Computational Mechanics Publ.*, Mc.Graw Hill, 1989.
- [20] C.A.M. Duarte, “A review of some meshless methods to solve partial differential equations”, *TICAM Report 95-06*, The Univ. of Texas, Austin, May 1995.
- [21] E. Oñate y S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, “A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow”, *Int. J. Num. Methods in Engngn*, Vol. 39, pp. 3839-3866, 1996.
- [22] E. Oñate, A. Hanganu, A. Barbat, S. Oller, R. Vitaliani, A. Saetta and R. Scotta, “Structural analysis and durability assessment of historical construction using a finite element damage model”, in *Structural Analysis of Historical Construction I*, P. Roca *et al.* (Eds.), CIMNE, Barcelona, 1997.
- [23] P. Roca, L. Pellegrini, E. Oñate and A. Hanganu, Análisis of the structure of Gothic cathedrals. Applications to Barcelona Cathedral, in *Structural Analysis of Historical Construction II*, P. Roca *et al.* (Eds.), CIMNE, Barcelona, 1998.
- [24] P. Roca *et al.* (Eds.), *Structural Analysis of Historical Construction*, CIMNE, Barcelona, Vol.1 (1997), Vol. 2 (1998).
- [25] R. Codina, C. Morton, E. Oñate y O. Soto, “Numerical aerodynamic análisis of large building using a finite element model with application to a telescope building”, *Int. Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, Vol. **10**, No. **6**, 616-633, 2000.
- [26] Integrated Design and Production of Advanced Sails (ID-PASS), Proyecto CRAFT de la Comisión Europea, Informe Final, CIMNE, Barcelona, 2001.
- [27] M. Chiumenti, C. Agelet de Saracibar, M. Cervera, “Constitutive modelling and numerical análisis of termo-mechanical phase-change sytems”, Monografía CIMNE No. 48, 1999.
- [28] E. Oñate, “Perspectivas de modelos constitutivos y técnicas de elementos finitos para análisis de procesos de conformado de metales”, Publicación CIMNE No. 94, 1996.
- [29] X. Plana, “Análisis por el método de elementos finitos del impacto de un vehículo con el programa SIMPACT”, Proyecto de Fin da Carrera, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Barcelona, 1999.